Лекция 14

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ГОМОГЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Решение однородного уравнения диффузии с нулевыми граничными условиями. Метод разделения переменных. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля. Решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Решение общей задачи. Линейный анализ устойчивости гомогенных стационарных решений одного уравнения типа реакция-диффузия

Решение краевых задач для системы нелинейных уравнений типа реакция-диффузия при произвольных функциях правых частей уравнений может быть выполнено при помощи компьютера. Методы аналитического решения разработаны только для линейных уравнений, не содержащих нелинейных функций относительно концентраций C, вида

$$C_t = DC_{rr} + f(r, t) \qquad (14.1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. Методы решения таких задач подробно изложены в учебниках и монографиях, посвященных уравнениям математической физики (Тихонов и Самарский, 2004).

Сама́рский Александр Андреевич (1919-2008) – академик, крупнейший специалист в области вычислительной математики, математической физики, теории математического моделирования. Создатель теории операторно-разностных схем, общей теории устойчивости разностных схем. С 1948 года совместно с академиком А.Н. Тихоновым (см. лекцию 6) разрабатывал численные методы и вел первые в СССР прямые расчеты мощности взрыва атомной, а позже — водородной бомбы. С 60-х годов вместе с учениками занимался проблемами лазерного термоядерного синтеза, магнитной и радиационной газодинамики, создания мощных лазеров, аэродинамики, атомной энергетики, физики плазмы и другими.

Ниже мы подробно рассмотрим решение линейной краевой задачи. В пространстве и времени это решение может быть представлено в виде ряда Фурье – бесконечной суммы гармонических функций пространственной координаты с убывающими со временем амплитудами. Отсюда становится понятным, почему в нелинейных системах с диффузией при наличии малых флуктуаций могут возникнуть автоволновые процессы и периодические по пространству постоянные во времени структуры (диссипативные структуры). Нелинейная система оказывается своеобразным «фильтром», выделяющим некоторые из членов гармонического ряда (разложения по синусам и косинусам) и поддерживающим их существование, в то время как более высокие гармоники затухают во времени.

Рассмотрим общий путь решения одномерной краевой задачи для уравнения (14.2) с начальным условием:

$$C(r, 0) = \varphi(r). \qquad (14.2)$$

и граничными условиями первого рода на обеих границах узкой трубки длины l:

$$C(0, t) = \mu_1(t);\ C(l, t) = \mu_2(t). \qquad (14.3)$$

Задачу решают в три этапа. Сначала ищут решение однородного уравнения

$$C_t = DC_{rr}. \qquad (14.4)$$

с начальным условием (14.2) и нулевыми краевыми условиями:

$$C(0, t) = 0;\ C(l, t) = 0. \qquad (14.5)$$

Затем ищут решение неоднородного уравнения (14.1) с нулевыми граничными условиями (14.5). Наконец, последний этап – решение общей краевой задачи – уравнения (14.1) с начальным условием (14.2) и граничными условиями (14.3).

Решение однородного уравнения

Пусть в системе имеет место только один процесс – диффузия. Решим основную вспомогательную задачу: найдем решение уравнения (14.4), не равное тождественно нулю и удовлетворяющее нулевым краевым условиям (14.5). При этом воспользуемся методом разделения переменных, представляя решение в виде:

$$C(r, t) = R(r)T(t). \qquad (14.6)$$

Здесь $R(r)$ – функция только пространственной переменной r, а $T(t)$ – функция только переменной времени t. Подставим решение в форме (14.6) в уравнение (14.4):

$$T'R = DTR''$$

и произведем деление обеих частей равенства на DRT. Получаем:

$$\frac{1}{D}\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} = -\lambda,$$

где $\lambda = const$, т.к. левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от r. Отсюда получим два самостоятельных уравнения для переменных r и t:

$$R''(r) + \lambda R(r) = 0, \qquad (14.7)$$

$$T'(t) + D\lambda T(t) = 0. \qquad (14.8)$$

Для определения функции $R(r)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение (14.7), причем вследствие граничных условий (14.5) функция $R(r)$ должна удовлетворять дополнительным условиям:

$$R(0) = R(l) = 0, \qquad (14.9)$$

т.к. в противном случае мы имели бы:

$$T(t) = 0 \text{ и } C(r, t) = 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$

никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $R(r)$ нам необходимо найти значения λ, называемые *собственными значениями*, при которых существует нетривиальное решение задачи (14.7, 14.9), а также найти сами эти решения. Такая задача называется задачей о собственных значениях или задачей Штурма-Лиувилля.

Общее решение уравнения (14.7) имеет вид:

$$R(r) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} r} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} r}. \tag{14.10}$$

При $\lambda \le 0$ задача не имеет нетривиальных решений. При $\lambda > 0$ общее решение (14.10) содержит мнимые показатели и поэтому может быть записано в виде

$$R(r) = D_1 \cos\sqrt{\lambda} r + D_2 \sin\sqrt{\lambda} r. \tag{14.11}$$

Краевые условия (14.9) дают:

$$R(0) = D_1 = 0,$$

$$R(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0.$$

Если $R(r)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda} l = 0, \text{ или } \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n – любое целое число. Величину $\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}$ в литературе, посвященной волновым процессам, обычно называют *волновым числом* и обозначают буквой k. Таким образом, нетривиальные решения задачи возможны лишь при значениях

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2. \tag{14.12}$$

Этим собственным значениям соответствуют *собственные функции*:

$$R_n(r) = D_n \sin\frac{n\pi}{l} r. \tag{14.13}$$

В дальнейшем произвольный множитель D_n будем считать равным единице. Вид собственных функций $R(r)$ для краевой задачи о диффузии (14.4, 14.5) в одномерном реакторе длины l при различных значениях n изображен на рис. 14.1.

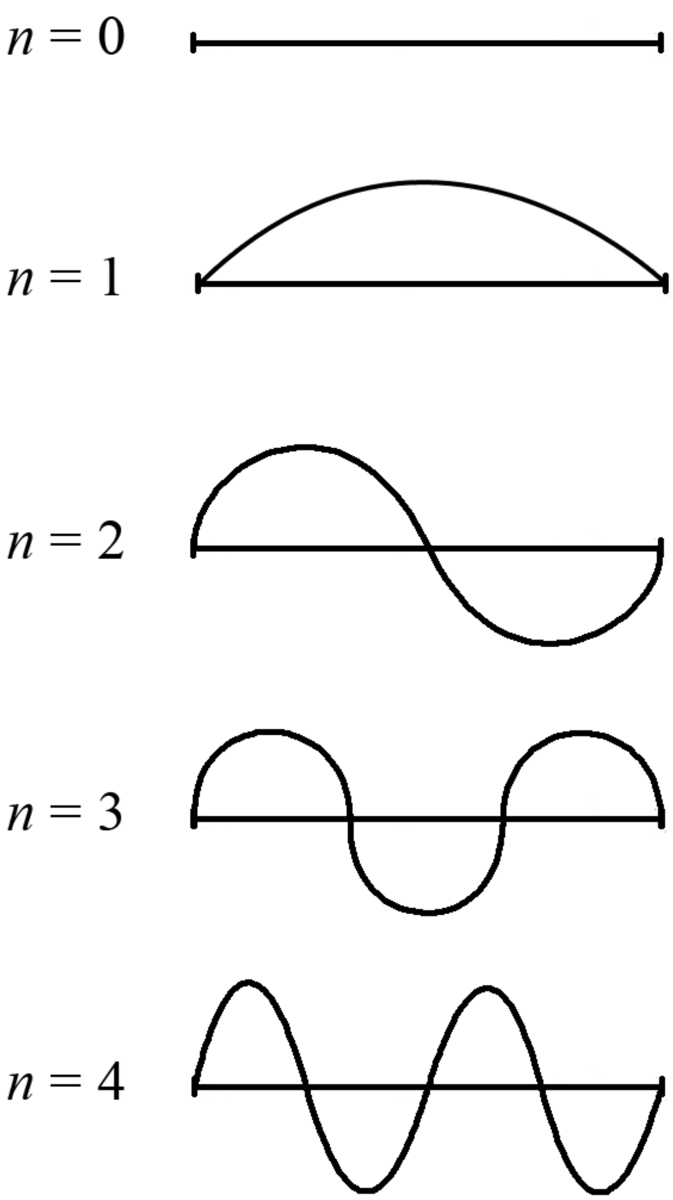

Рис. 14.1. Собственные функции $R_n(r)$ для краевой линейной задачи о диффузии в одномерной трубке длины l с нулевыми краевыми условиями

Рассмотрим теперь уравнение (14.8):

$T'(t) + D\lambda T(t) = 0$

и найдем его решения, соответствующие собственным значениям λ_n (14.12). Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, его решения для каждого n представляют собой затухающие со временем экспоненты (см. лекция 2):

$$T_n(t) = A_n e^{-D\lambda_n t}. \qquad (14.14)$$

Здесь A_n – не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче (14.4, 14.5), видим, что частными решениями уравнения (14.4), удовлетворяющими нулевым краевым условиям, являются функции:

$$C_n(r,t) = R_n(r)\cdot T_n(t) = A_n e^{-D\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}r \qquad (14.15)$$

Эти частные решения (14.15) представляют собой затухающие со временем синусоидальные распределения концентрации *C*. Легко видеть, что выражение, стоящее под знаком sin представляют собой произведение волнового числа $k_n = \frac{\pi n}{l}$ и координаты *r*. Таким образом, $k_n = \frac{\pi n}{l}$ является «частотой колебания» переменной *C* в пространстве или, что то же самое, величина $\Lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ является «периодом» колебаний концентрации *C* по пространству *r*. Иначе говоря, $\Lambda_n = \frac{2l}{n}$ есть длина волны синусоиды, представляющей собой собственное решение C_n (рис. 14.1). Чем больше номер гармоники *n*, тем меньше период синусоиды в пространстве и тем больше коэффициент затухания этой синусоиды во времени (за счет множителя $e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt}$).

Общее решение представляет собой суперпозицию частных решений.

Зависимость решений от начальных условий

Вернемся к задаче с ненулевыми начальными условиями (14.2). Представим решение в виде ряда:

$$C(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt}\sin\frac{\pi n}{l}r\,. \qquad (14.16)$$

Функция $C(r,\ t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям (14.5), т.к. им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий (14.2), получим выражение для A_n:

$$\varphi(r) = C(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}r\,. \qquad (14.17)$$

Таким образом, A_n представляют собой коэффициенты *разложения Фурье* (см. курс математического анализа) функции $\varphi(r)$ по синусам в интервале $(0,\ l)$:

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\,. \qquad (14.18)$$

Здесь ξ – переменная интегрирования.

Формулу 14.16 можно записать в виде:

$$C(r,t) = \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt} \sin\frac{\pi n}{l} r \cdot \sin\frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi . \qquad (14.19)$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования законно, поскольку ряды сходятся равномерно по ξ при $t > 0$.

Обозначим:

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt} \sin\frac{\pi n}{l} r \cdot \sin\frac{\pi n}{l} \xi . \qquad (14.20)$$

Тогда $C(r, t)$ можно представить через $G(r, \xi, t)$ в виде:

$$C(r,t) = \int_0^l G(r,t,\xi) \varphi(\xi) d\xi . \qquad (14.21)$$

$G(r, \xi, t)$ называется *функцией мгновенного источника* и характеризует распределение вещества в трубке $0 \le r \le l$ в момент времени t, если в начальный момент времени концентрация вещества равна нулю, и в этот момент в точке $r = \xi$ мгновенно выделяется некоторое количество вещества, а концентрация вещества на концах трубки все время поддерживается нулевой. Как мы увидим в дальнейшем, выражение для функции источника удобно использовать при решении неоднородного уравнения диффузии.

Итак, мы получили выражения (14.19, 14.21) для решения однородного уравнения с заданными начальными условиями и нулевыми краевыми условиями. При граничных условиях непроницаемости концов одномерного реактора на решения уравнения (14.7) накладываются краевые условия:

$$\frac{\partial C}{\partial r}(0,t) = \frac{\partial C}{\partial r}(l,t) = 0 . \qquad (14.22)$$

Краевые условия (4.22) дают: $\frac{\partial R}{\partial r}(0) = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial r}(l) = 0.$

Продифференцировав выражение (14.11) по r, получим:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -D_1 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} r + D_2 \sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda} r .$$

Краевые условия (14.22) дают:

$$\left.\frac{\partial R}{\partial r}\right|_{r=0} = D_2 \sqrt{\lambda} = 0 , \; D_2 = 0 ;$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial r}\right|_{r=l} = -D_1 \sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda} l = 0.$$

Отсюда, как и в случае нулевых краевых условий (14.5), получаются те же величины собственных значений $\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}$, но собственными функциями для одномерного реактора с непроницаемыми концами являются функции

$$R_n = D_n \cos\frac{\pi n}{l} r\,. \tag{14.23}$$

Решение краевой задачи (14.4, 14.22) поэтому будет иметь вид:

$$C(r,t) = \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt} \cos\frac{\pi n}{l} r \cdot \cos\frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi, \tag{14.24}$$

а функция источника, соответственно, может быть представлена виде:

$$G(r,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Dt} \cos\frac{\pi n}{l} r \cdot \cos\frac{\pi n}{l} \xi. \tag{14.25}$$

Таким образом, для краевых задач как первого рода (на границах заданы концентрации), так и второго рода (на границах заданы потоки) собственными функциями являются периодические гармонические функции пространственной координаты: $\sin\frac{\pi n}{l} r$, $\cos\frac{\pi n}{l} r$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Если реакция происходит в безграничной трубке, решение однородного уравнения

$$C_t = DC_{rr}$$

с начальным условием $C(0, r) = g(r)$ имеет вид:

$$C(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)}{Dt}} d\xi\,. \tag{14.26}$$

Из этой формулы в частности следует, что если начальная концентрация была положительна только на конечном отрезке $0 \le r \le l$, то при любом $t > 0$ концентрация в момент t будет положительна всюду на числовой прямой: $-\infty < r < \infty$. Таким образом, с помощью диффузии большие концентрации распространяются сравнительно медленно, в то время как малые концентрации распространяются за малое время на большие расстояния. Следует, однако, иметь в виду, что уравнение (14.26) на очень малых интервалах времени плохо описывает процесс диффузии.

Если рассматривается диффузия на конечном отрезке $[0, l]$ с условием непроницаемости на концах, то любая начальная концентрация с ростом t стремится к равномерному распределению по отрезку.

Решение неоднородного уравнения диффузии с нулевым начальным условием и нулевыми краевыми условиями

Присутствие в правой части уравнения (14.1) члена $f(r, t)$ означает наличие источника (или стока) вещества в данном месте через стенки трубки. Например, при описании процессов диффузии ионов вдоль мембраны возможен трансмембранный перенос ионов (см. модель пространственно-временных распределений протонов вдоль мембраны водорослей в лекции 21).

Для решения неоднородного уравнения диффузии

$$C_t = DC_{rr} + f(r, t) \tag{14.1}$$

с нулевым начальным условием

$$C(r, 0) = 0$$

и нулевыми краевыми условиями

$$C(0, t) = 0, \; C(l, t) = 0$$

решение $C(r, t)$ также ищут в виде разложения в ряд Фурье по $\sin\frac{\pi n}{l}r$:

$$C(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} r.$$

Здесь функции $C_n(t)$ могут быть получены при подстановке предполагаемой формы решения в исходное уравнение (14.1), где функция $f(r, t)$ также представляется в виде ряда Фурье:

$$f(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} r\,. \tag{14.27}$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид:

$$C(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin\frac{\pi n}{l} r. \tag{14.28}$$

Как и в случае однородного уравнения, оно может быть представлено через функцию источника:

$$C(r,t) = \int_0^t \int_0^l G(r,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau\,, \tag{14.29}$$

$$G(r,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D(t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l} r \cdot \sin\frac{\pi n}{l} \xi\,. \tag{14.30}$$

Легко видеть, что функция 14.30 совпадает с функцией (14.20). Различие состоит в том, что в случае формулы (14.20) мы изучали однородное уравнение диффузии и поэтому рассматривали источник вещества, действующий лишь в момент времени $t = 0$, согласно начальному условию (14.2). Дальнейшее распределение вещества определялось в этом случае “пассивной” диффузией по градиенту концентраций. В случае неоднородного уравнения (14.1) функция $f(r, t)$ задает распределение источников вещества, действующих постоянно. Поэтому в выражении для $C(r, t)$, через функцию источника необходимо суммировать действие мгновенных точечных источников во все моменты времени от $t = 0$ до рассматриваемого момента t (интеграл по τ) и во всех точках одномерного реактора (интеграл по ξ). Таким образом, исходя из физического смысла функции источника $G(r, \xi, t)$ можно было бы сразу написать выражение (14.29) для функции, дающей решение неоднородного уравнения.

Общая краевая задача

Решение общей краевой задачи: уравнения (14.1) с начальными (14.2) и краевыми (14.3) условиями сводится к решению задачи с нулевыми краевыми условиями. Для этого решение $C(r,t)$ представляют в виде суммы двух функций:

$$C(r, t) = V(r, t) + v(r, t). \qquad (14.31)$$

Здесь $V(r, t)$ – известная функция:

$$V(r,t) = \mu_1(t) + \frac{r}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right], \qquad (14.32)$$

а v – неизвестная функция, которая определяется как решение уравнения

$$v_t = Dv_{rr} + \overline{f}(r,t), \text{ где } \overline{f}(r,t) = f(r,t) - \left[V_t - DV_{rr}\right].$$

Начальные условия для функции v:

$$v(r,0) = \overline{\varphi}(r)\,;\ \overline{\varphi}(r) = \varphi(r) - V(r,0)\,,$$

а граничные условия – нулевые:

$$\overline{\mu}_1(t) = 0,\ \overline{\mu}_2(t) = 0.$$

Метод нахождения функции v мы разобрали выше.

Таким образом, решение (14.31) представляет собой сумму двух составляющих, Функция $V(r, t)$ в каждый момент времени t^* задает распределение концентраций, линейно меняющееся с пространственной координатой между значениями $\mu_1(t^*)$ и $\mu_2(t^*)$, на концах трубки. Функция $v(r, t)$ задает отклонение от этой, линейной по r, функции (рис. 14.2).

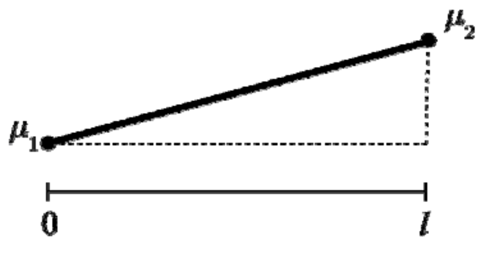

Рис. 14.2. Иллюстрация к формуле (14.31)

Итак, мы рассмотрели аналитические методы решения однородных (типа 14.4) и неоднородных (типа 14.1) уравнений, описывающих диффузию одного вещества в одномерном реакторе. Как мы видели, решение представляется в виде интегралов, причем удобный для аналитического исследования вид решения может быть получен лишь в небольшом числе частных случаев. Еще более сложной ситуация становится при рассмотрении системы нескольких веществ, способных вступать в химические реакции и диффундировать в трехмерном пространстве, а именно с такими системами мы имеем дело в биологии. Однако, как мы увидим ниже, некоторые выводы о свойствах решений могут быть сделаны на основании качественного исследования моделей. Одна из проблем, при решении которой оказываются эффективными методы качественного исследования – изучение устойчивости стационарных состояний распределенных систем.

В любом случае, условием возникновения в распределенных системах сложных пространственно-временных режимов является неустойчивость гомогенного стационарного состояния. Границы области параметров, в которой возникает такая неустойчивость, могут быть установлены на основе анализа линеаризованной системы подобно тому, как это мы делали для локальных систем в лекциях 2, 4, 5.

Для такого исследования оказывается важным уметь решать линейные системы, разобранные выше, поскольку, как правило, задача об устойчивости стационарных состояний нелинейной системы требует решения при $t \to \infty$ линейной задачи (подобно тому, как для изучения устойчивости нелинейной точечной системы необходимо исследовать линеаризованную систему, см. лекции 2, 4, 5).

Устойчивость стационарных состояний нелинейных систем

При построении и исследовании математических моделей биологических систем особый интерес представляют стационарные состояния систем, которые устанавливаются по истечении достаточно большого промежутка времени (при $t \to \infty$). При этом особенно важен вопрос об устойчивости стационарных состояний. Действительно, только устойчивые стационарные состояния могут реализоваться на практике, поскольку в любой реальной системе всегда присутствуют малые флуктуации. Понятие устойчивости подробно обсуждается в лекции 2.

Если некоторое стационарное состояние системы неустойчиво, это означает, что с течением времени в системе устанавливается какой-либо иной режим. Для точечной системы это могут быть другие устойчивые стационарные состояния (в триггерных системах, лекция 7), автоколебания (лекция 8) или динамический хаос (лекция 10). В распределенных системах неустойчивость однородных в пространстве (гомогенных) стационарных решений может приводить к возникновению диссипативных структур, автоволновых процессов и квазистохастических режимов.

Стационарные, т.е. неизменные во времени, решения можно найти из условия обращения в нуль производной по времени:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Поясним, как ставится задача об устойчивости стационарных решений распределенных систем на примере одного автономного уравнения с одной пространственной переменной. Пусть реакция происходит в тонкой трубке длины l. Уравнение, описывающее изменение переменной C в пространстве и во времени, имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = f(C) + D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}. \qquad (14.33)$$

Пусть краевые условия соответствует непроницаемости трубки на торцах:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial C}{\partial r}(t,l) = 0. \qquad (14.34)$$

Поскольку речь идет о стационарном решении (поведении переменной C при $t \to \infty$), начальные условия не играют роли. Пусть $C_0(r)$ – стационарное решение уравнения (14.33), т.е. решение задачи:

$$f(C) + D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = 0 \qquad (14.35)$$

с краевым условием непроницаемости границ.

Зададим системе некоторое возмущение $\delta(r)$, т.е. выберем в качестве начальной функции в этой задаче функцию, близкую к C_0:

$$C(0,r) = C_0(r) + \delta(r); \ |\delta(r)| << 1.$$

Пусть $C_\delta(t, r)$ – решение задачи (14.33, 14.34) с такой начальной функцией. При малых $\delta(r)$ функция $C_\delta(t,r)$ может быть представлена в виде:

$$C_\delta(t, r) \approx C_0(r) + \delta(t, r). \qquad (14.36)$$

Стационарное решение $C_0(r)$ называется устойчивым, если для достаточно малых отклонений от стационарного состояния $|\delta(r)|$ функция $C_\delta(t, r)$ при всех $t \geq 0$ мало отличается от $C_0(r)$.

Вблизи $C_0(r)$ нелинейную функцию $f(C)$ можно приблизить линейной функцией, использовав первый член разложения по C в ряду Тейлора:

$$f(C) = f(C_0) + f_c'(C_0)\left(C - C_0\right), \; C - C_0 = \delta(t,r). \qquad (14.37)$$

Подставим выражения (14.36) и (14.37) в формулу (14.33):

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta(t,r)}{\partial t} = f(C_0) + f_c'(C_0)\delta(t,r) + \frac{\partial^2 C_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \delta(t,r)}{\partial r^2}.$$

Учитывая то обстоятельство, что C_0 – стационарное решение, удовлетворяющее уравнению (14.35), получим уравнение для $\delta(t, r)$:

$$\frac{\partial \delta(t,r)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta(t,r)}{\partial r^2} + f_c'(C_0)\delta(t,r) \qquad (14.38)$$

с начальным условием $\delta(0, r) = \delta(r)$ и краевыми условиями:

$$\frac{\partial \delta(t,0)}{\partial r} = \frac{\partial \delta(t,l)}{\partial r} = 0. \qquad (14.39)$$

Здесь и в дальнейшем считаем для краткости, что коэффициент диффузии $D = 1$.

Итак, для исследования устойчивости стационарных состояний распределенных систем нужно изучить поведение при $t \to \infty$ решения линейной задачи (14.38, 14.39). Как правило, свойства линейной задачи определяют устойчивость или неустойчивость решения соответствующей нелинейной системы. Исключение составляют случаи нейтрального поведения решений линейной задачи, как это имело место и при исследовании точечных систем (лекция 5).

Пусть задача (14.33, 14.34) имеет однородные по пространству стационарные решения. Рассмотрим вопрос об устойчивости таких решений. Для однородных стационарных решений

$$f_c'(C_0) = A = const.$$

Поэтому задача (14.38, 14.39) представляет собой линейное уравнение диффузии с соответствующими краевыми и начальными условиями. Выше (см. 14.23) мы видели, что собственными функциями такой задачи с условиями непроницаемости на концах отрезка являются функции

$$\cos\frac{k\pi r}{l}, \; k = 0, 1, ...$$

Решение $\delta(t, r)$ задачи (14.38) с начальной функцией $\delta(r)$ можно представить в виде:

$$\delta(t,r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\cos\frac{k\pi r}{l}.$$

Подставляя это выражение в (14.38), получим следующее уравнение для нахождения a_k:

$$\frac{\partial a_k(t)}{\partial t} = \left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2} + A\right)a_k(t), \; a_k(0) = 1.$$

Отсюда:

$$a_k(t) = \exp\left\{\left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2} + A\right)t\right\}. \qquad (14.40)$$

Величины a_k задают временной характер нарастания или затухания соответствующей гармоники возмущения $\delta(t, r)$, в то время как множители $\cos\frac{k\pi r}{l}$ определяют распределение начального отклонения вдоль пространственной координаты.

Если в формулах (14.40) $A < 0$, то при любом $k = 0, 1, 2, ...$ функция $\delta(t, r) \to 0$ при $t \to 0$, какова бы ни была начальная функция $\delta(r)$. Таким образом, в этом случае любое малое возмущение однородного по пространству стационарного решения со временем затухает. Если $A = 0$, показатель экспоненты отрицателен при любых k, кроме $k = 0$. В такой системе будут затухать все гармоники $\cos\frac{k\pi r}{l}$, для $k = 0, 1, 2, ...$; относительно нулевой гармоники линейное приближение не дает ответа. Если $A > 0$, существует конечное число гармоник вида $\cos\frac{k\pi r}{l}$, которое приводят к развитию возмущений стационарного однородного решения. А именно, это только те гармоники, для которых $\frac{k^2\pi^2}{l^2} < A = f'(C_0)$. Если начальное возмущение не содержит этих гармоник, то оно со временем будет исчезать.

Вспомним, что в начале нашего рассмотрения мы положили $D = 1$. Если учесть коэффициент диффузии, в системе, где $f'(C_0) > 0$ и потому возможны незатухающие начальные возмущения, номер наивысшей незатухающей гармоники в соответствии с (14.38) можно определить по формуле:

$$k^* < \sqrt{\frac{f'(C_0)l^2}{D\pi^2}}.$$

Таким образом, номер наивысшей незатухающей гармоники тем больше, чем длиннее реактор и тем меньше, чем выше значение коэффициента диффузии. Незатухающие гармоники, развиваясь, могут приводить систему к установлению пространственно неоднородных диссипативных структур или автоволновых режимов.

Исследование устойчивости неоднородных по пространству стационарных решений более сложно. Для этого необходимо изучить собственные значения дифференциального оператора $Lv = \frac{d^2v}{dr^2} + f_c'(C_0(r))v$ с условиями $v'(0) = v'(l) = 0$. Если все собственные значения такой задачи отрицательны, то решение $C_0(r)$ устойчиво. Если какие-то собственные значения положительны, то для некоторых возмущений разовьется неустойчивость. В случае одного уравнения с условиями непроницаемости на концах одномерного реактора можно доказать, что все неоднородные по пространству стационарные решения задачи неустойчивы. При других граничных условиях могут появиться устойчивые неоднородные по пространству решения уравнения (14.32). Как мы увидим в последующих параграфах, в случае взаимодействия двух и более компонентов в системе (система двух и более уравнений), возможны негомогенные стационарные решения и при условии непроницаемости торцов реактора.

ПРИМЕР

В качестве примера найдем стационарные решения и исследуем устойчивость однородных стационарных решений одного уравнения с одной пространственной переменной, которое встречается в некоторых моделях популярной генетики, экологии, теории возбудимых сред:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + C(a-C)(C-b) \tag{14.41}$$

Для $0 < a < b$ вид функции $f(C)$ в этом уравнении соответствует графику, изображенному на рис. 14.3.

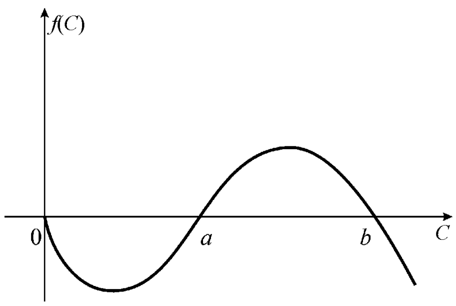

Рис. 14.3. Функция $f(C)$ для уравнения (14.39)

Переменная C в задачах популяционной динамики соответствует численности вида. Вид функции $f(C)$ можно интерпретировать следующим образом. При малых концентрациях особей вида $0 < C < a$ смертность превышает рождаемость, как это имеет место в двуполых популяциях, когда вероятность встречи особей разных полов меньше величины, обратной продолжительности репродуктивного периода. При $a < C < b$ скорость прироста концентрации положительна, причем ее величина проходит через максимум, как в случае логистического закона прироста численности. При $C = b$ численность вида достигает насыщения. (Подробное рассмотрение такого типа модели см. лекция 3). Изображенная на рис. 14.3 функция используется также в популярной модели распространения нервного импульса Фитцхью-Нагумо, которую мы рассмотрим в лекции

18.

Устойчивость стационарного состояния модели

Предположим, что процесс, описываемый уравнением (14.39), происходит в трубке длины l ($0 \le r \le l$) с непроницаемыми концами. Это накладывает граничные условия:

$$\frac{\partial C}{\partial r}(t,0) = \frac{\partial C}{\partial r}(t,l) = 0$$

Рассмотрим соответствующее точечное уравнение:

$$\frac{dc}{dt} = c(a-c)(c-b) \qquad (14.42)$$

Оно имеет три стационарных решения:

$$\overline{c}_1 = 0, \quad \overline{c}_2 = a, \quad \overline{c}_3 = b. \qquad (14.43)$$

Из графика на рис. 14.3 следует, что стационарные точки $\overline{c}_1 = 0$ и $\overline{c}_3 = b$ устойчивы, а $\overline{c}_2 = a$ – неустойчивое положение равновесия для точечной системы.

Исследуем теперь стационарные решения задачи (14.42, 14.43). Для их определения имеем обыкновенное дифференциальное уравнение, независимой переменной которого является пространственная координата r:

$$D\frac{d^2\overline{c}}{dr^2} + \overline{c}(\overline{c}-a)(b-\overline{c}) = 0, \qquad 0 \le r \le l, \qquad (14.41)$$

причем

$$\frac{d\overline{c}}{dr}(0) = 0; \qquad \frac{d\overline{c}}{dr}(l) = 0.$$

Прежде всего, имеем три стационарных решения, которые являются положениями равновесия соответствующей точечной системы: $c_1 = 0$, $c_2 = a$, $c_3 = b$. Но при не очень малых длинах реактора l имеются еще и неоднородные по пространству решения. С ростом длины реактора число различных стационарных решений возрастает. Однако в случае одного уравнения с условиями непроницаемости на концах все неоднородные в пространстве решения неустойчивы и, следовательно, в природе не реализуются.

Исследуем устойчивость однородных стационарных состояний системы, описываемой уравнением (14.39). В соответствии с процедурой, описанной выше, вблизи стационарного решения $\overline{c}(r)$ аппроксимируем нелинейную функцию

$$f(c) = c(a-c)(c-b)$$

линейной функцией:

$$f^*(c) = f(\overline{c}) + f_c'(\overline{c})(c-\overline{c}).$$

Рассмотрим знак производной функции $f'(\overline{c})$ в стационарных точках. Как видно из рис. 14.2, при $0 < a < b$ значения $f'(0)$ и $f'(b)$ отрицательны и, следовательно, стационарные решения $\overline{c} = 0$ и $\overline{c} = b$ устойчивы. Решение $\overline{c} = a$ неустойчиво, так как $f(a) > 0$. Заметим, что существует только конечное число гармоник вида $\cos\frac{k\pi n}{l}$, которые приводят к развитию возмущений стационарного решения $\overline{c} = a$. Это те гармоники, для которых $\frac{k^2\pi^2}{l^2} < f'(a)$. Если начальное возмущение не содержит этих гармоник, оно со временем будет затухать.

Литература

Тихонов А.Н. и Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Издательство МГУ, 2004